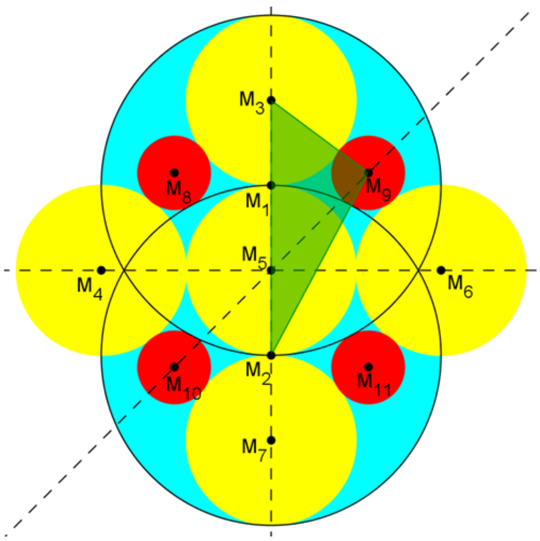
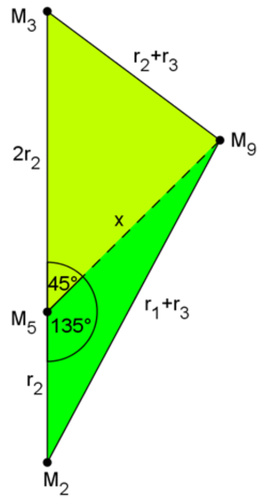
Lösung zu Aufgabe 16: Viele in sich verschlungene Kreise

Die Lösung wird am Beispiel des Kreises k_9 durchgeführt. Es gilt zu erkennen, dass M_9 auf der Winkelsymmetrale von $\angle M_6 M_5 M_3$ liegt, da M_9 von M_3 und M_6 gleichweit entfernt ist. Daraus folgt, dass $\angle M_9 M_5 M_3 = 45°$ und $\angle M_2 M_5 M_9 = 135°$.

Sei $\overline{M_5 M_9} = x$. Nun betrachte man die Dreiecke $\triangle M_3 M_5 M_9$ und $\triangle M_2 M_5 M_9$ und verwende in beiden den Kosinussatz.





$\triangle M_3 M_5 M_9$: $(r_2 + r_3)^2 = x^2 + (2r_2)^2 - 2 \cdot x \cdot 2r_2 \cdot \cos 45°$

$$\Leftrightarrow \quad -3r_2^2 + 2r_2 r_3 + r_3^2 = x^2 - 2\sqrt{2} r_2 x \qquad (1)$$

$\triangle M_2 M_5 M_9$: $(2r_2 + r_3)^2 = x^2 + r_2^2 - 2 \cdot x \cdot r_2 \cdot \cos 135°$

$$\Leftrightarrow \quad 3r_2^2 + 4r_2 r_3 + r_3^2 = x^2 + \sqrt{2} r_2 x \qquad (2)$$

Subtrahieren von (2) – (1) liefert: $6r_2^2 + 2r_2 r_3 = 3\sqrt{2} r_2 x$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{6r_2 + 2r_3}{3\sqrt{2}}$$

Setzt man x in (1) ein, erhält man: $3r_2 + 4r_2 r_3 + r_3^2 = \left(\frac{6r_2 + 2r_3}{3\sqrt{2}}\right)^2 + \sqrt{2} r_2 \cdot \frac{6r_2 + 2r_3}{3\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \quad 7r_3^2 + 18 r_2 r_3 - 9r_2^2 = 0$$

Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung lauten:

$$r_3 = \frac{3}{7} r_2 \qquad (\text{bzw.} \quad r_3 = -3r_2)$$

Da r_3 jedoch in Abhängigkeit von r_1 gesucht ist, ersetze man nun noch $r_2 = \frac{r_1}{2}$ und man erhält die Lösung $r_3 = \frac{3}{14} r_1$.