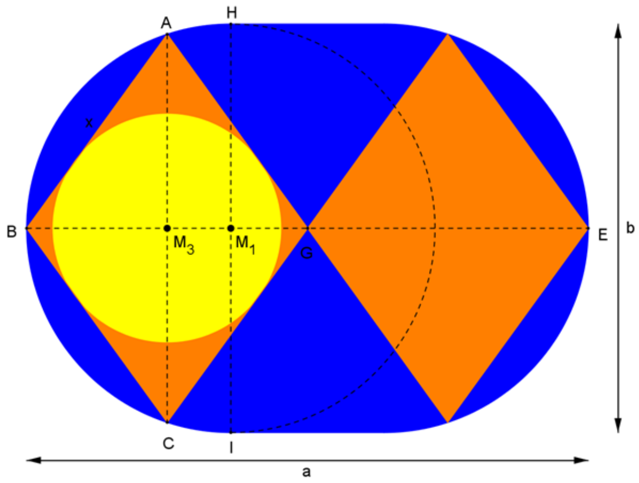
Lösung zu Aufgabe 14: Ein „Oval“, zwei Rhomben und deren Inkreise

Das Dreieck $\triangle ABC$ ist dem Kreis k_1 eingeschrieben, sodass der Sehnensatz (siehe Kapitel 3.6) angewandt werden kann: $\overline{BM_3} \cdot \left(2r_1 - \overline{BM_3}\right) = \overline{AM_3} \cdot \overline{CM_3}$. Ersetzt man $\overline{BM_3} = \frac{a}{4}$, $2r_1 = b$ und $\overline{CM_3} = \overline{AM_3}$, so erhält man $\frac{a}{4} \cdot \left(b - \frac{a}{4}\right) = \overline{AM_3}^2$ bzw. $\overline{AM_3}^2 = \frac{ab}{4} - \frac{a^2}{16}$.



Der Lehrsatz des Pythagoras angewandt im Dreieck $\triangle ABM_3$ liefert $\overline{AB}^2 = \overline{AM_3}^2 + \overline{BM_3}^2$, also $x^2 = \frac{ab}{4} - \frac{a^2}{16} + \left(\frac{a}{4}\right)^2$, was wiederum zu $x = \frac{\sqrt{ab}}{2}$, dem ersten Teil der Lösung, führt.

Der Flächeninhalt des Rhombus $ABCG$ lässt sich sowohl über die Diagonalen mithilfe von $A = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BG}$, als auch über Seite und Höhe mithilfe von $A = x \cdot 2r_2$ berechnen.

Da $\overline{AC} = 2 \cdot \overline{AM_3} = 2\sqrt{\frac{ab}{4} - \frac{a^2}{16}}$ und $\overline{BG} = \frac{a}{2}$ ist, liefert Gleichsetzen der beiden Flächeninhaltsformeln: $\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{\frac{ab}{4} - \frac{a^2}{16}} \cdot \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{ab}}{2} \cdot 2r_2$.

Umformen führt zum zweiten Teil der Lösung: $r_2 = \frac{a}{8b}\sqrt{4b^2 - ab}$.