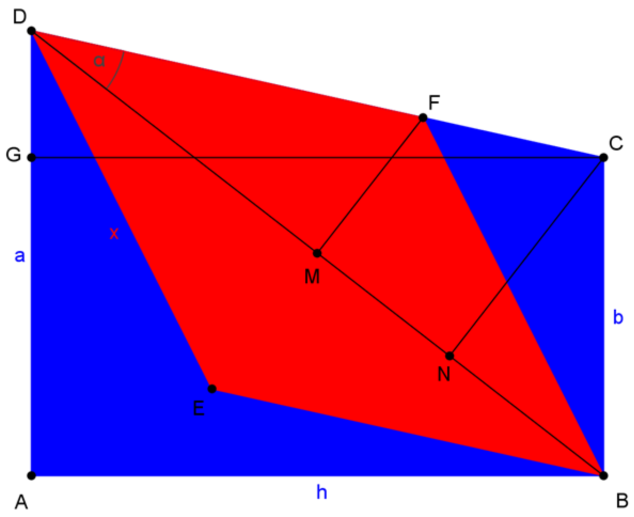
Lösung zu Aufgabe 13: Ein Rhombus im Trapez

Zunächst werden die Punkte G, M und N sowie entsprechende Hilfslinien und der Winkel $\alpha = \angle BDC$ wie in der Abbildung eingezeichnet.



Im Dreieck $\triangle CDG$ ergibt der Lehrsatz des Pythagoras $\overline{CD} = \sqrt{(a-b)^2 + h^2}$.

Ebenso erhält man im Dreieck $\triangle ABD$, dass $\overline{BD} = \sqrt{a^2 + h^2}$.

Im rechtwinkligen Dreieck $\triangle CDN$ gilt $\cos\alpha = \frac{\overline{DN}}{\overline{CD}}$.

Anwendung des Kosinussatzes im Dreieck $\triangle BCD$ liefert $b^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 - 2\cdot\overline{BD}\cdot\overline{CD}\cdot\cos\alpha$.

Ersetzt man nun $\overline{BD}$, $\overline{CD}$ und $\cos\alpha$, so erhält man

$$b^2 = a^2 + h^2 + (a-b)^2 + h^2 - 2\cdot\sqrt{a^2+h^2}\cdot\overline{DN}$$

Umgeformt ergibt dies $\overline{DN} = \frac{a^2 - ab + h^2}{\sqrt{a^2+h^2}}$.

Nun betrachte man die ähnlichen Dreiecke $\triangle DMF$ und $\triangle DNC$:

Hier gilt $\overline{DM} : \overline{DF} = \overline{DN} : \overline{DC}$, also $\frac{\sqrt{a^2+h^2}}{2} : x = \frac{a^2-ab+h^2}{\sqrt{a^2+h^2}} : \sqrt{(a-b)^2+h^2}$.

Umformung ergibt das gesuchte $x = \frac{(a^2+h^2)\sqrt{(a-b)^2+h^2}}{2(a^2-ab+h^2)}$.