Lösung zu Aufgabe 9: Zwei Kreise im rechtwinkligen Dreieck 1

Laut Lehrsatz des Pythagoras gilt $c=\sqrt{a^2+b^2}$.

Aus den beiden Flächenformeln $A=\frac{ab}{2}=\frac{ch}{2}$ folgt $h=\frac{ab}{c}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Der Kathetensatz besagt, dass $a^2=pc$ und $b^2=qc$, woraus sich $p=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ und $q=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ergibt.

Verwendet man Satz **Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.** im Dreieck $\triangle BCD$, so erhält man $2r_1=p+h-a=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}-a$, was sich wiederum zu

$$(2r_1+a)\sqrt{a^2+b^2}=a(a+b) \tag{1}$$

vereinfachen lässt.

Analog ergibt sich im Dreieck $\triangle ACD$ die Gleichung

$$(2r_2+b)\sqrt{a^2+b^2}=b(a+b) \tag{2}$$

Dividiert man nun (1) $\div$ (2), so erhält man $\frac{2r_1+a}{2r_2+b}=\frac{a}{b}$. Dies wird zu

$$b=\frac{r_2}{r_1}a \tag{3}$$

umgeformt. Einsetzen von (3) in (1) ergibt $(2r_1+a)\sqrt{a^2+\frac{r_2^2}{r_1^2}a^2}=a\left(a+\frac{r_2}{r_1}a\right)$

$$(2r_1+a)a\sqrt{1+\frac{r_2^2}{r_1^2}}=a\left(a+\frac{r_2}{r_1}a\right) \qquad \left|:a \quad (a\neq 0)\right.$$

$$(2r_1+a)\frac{\sqrt{r_1^2+r_2^2}}{r_1}=a+\frac{r_2}{r_1}a \qquad \left|\cdot r_1\right.$$

$$2r_1\sqrt{r_1^2+r_2^2}+a\sqrt{r_1^2+r_2^2}=r_1a+r_2a \qquad \left|-a\sqrt{r_1^2+r_2^2}\right.$$

$$2r_1\sqrt{r_1^2+r_2^2}=a\left(r_1+r_2-\sqrt{r_1^2+r_2^2}\right) \qquad \left|:\left(r_1+r_2-\sqrt{r_1^2+r_2^2}\right)\right.$$

$$a=\frac{2r_1\sqrt{r_1^2+r_2^2}}{r_1+r_2-\sqrt{r_1^2+r_2^2}}=\frac{2r_1\sqrt{r_1^2+r_2^2}\cdot\left(r_1+r_2+\sqrt{r_1^2+r_2^2}\right)}{(r_1+r_2)^2-\left(r_1^2+r_2^2\right)}=\frac{\sqrt{r_1^2+r_2^2}\cdot(r_1+r_2)+r_1^2+r_2^2}{r_2}$$

Einsetzen in (3) führt zu $b=\frac{\sqrt{r_1^2+r_2^2}\cdot(r_1+r_2)+r_1^2+r_2^2}{r_1}$.