Lösung zu Aufgabe 8: Ein Quadrat im Rhombus

Die Fläche A_R eines Rhombus ist die Hälfte des Produkts der Diagonalen. In diesem Fall

$$A_R = \frac{2t \cdot 2\sqrt{a^2 - t^2}}{2} = 2t\sqrt{a^2 - t^2}\ .$$

Die Seite des Quadrats ist $x = \sqrt{2}t$, wodurch sich ein Flächeninhalt $A_Q = 2t^2$ ergibt.

Die gesuchte blaue Fläche ist daher $A(t) = A_R - A_Q = 2t\sqrt{a^2 - t^2} - 2t^2$.

Differenzieren ergibt $\frac{A'(t)}{2} = \sqrt{a^2 - t^2} - \frac{t^2}{\sqrt{a^2 - t^2}} - 2t$.

Setzt man nun $\frac{A'(t)}{2} = 0$, so erhält man $a^2 - 2t^2 = 2t\sqrt{a^2 - t^2}$.

Quadrieren beider Seiten der Gleichung führt zu $8t^4 - 8a^2t^2 + a^4 = 0$, woraus sich $t^2 = \frac{8a^2 \pm \sqrt{64a^4 - 32a^4}}{16}$ berechnen lässt, was wiederum zu $t^2 = \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{a^2}{2}$ vereinfacht werden kann. Ersetzt man nun $t^2 = \frac{x^2}{2}$, so erhält man $x = \pm\sqrt{1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot a$. Da jedoch $0 < x < a$ gilt, ist $x = \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot a$ die einzig mögliche Lösung.

Da im Laufe des Lösungsweges eine Gleichung quadriert wurde, bestätigt erst die Probe, also das Einsetzen der Lösung in die Gleichung, dass es sich dabei auch um eine tatsächliche Lösung handelt.