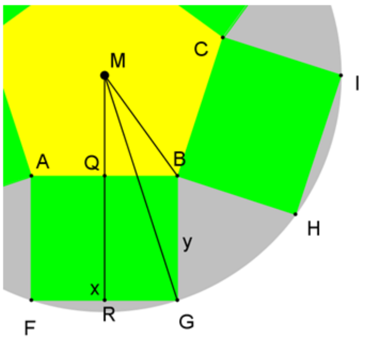
Lösung zu Aufgabe 6: Ein Fünfeck und fünf Rechtecke im Kreis

Sei $\overline{AF} = y$ die Rechteckbreite.



Die Größe eines Innenwinkels eines regelmäßigen n-Ecks beträgt $\alpha = \frac{(n-2)}{n} \cdot 180°$. Folglich ist im Fünfeck ein Innenwinkel $\alpha = \frac{3}{5} \cdot 180^\circ = 108^\circ$.

Daraus ergibt sich der Winkel $\angle MBQ = \frac{\alpha}{2} = 54°$.

Die Strecke $\overline{MR}$ lässt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck $\triangle RGM$ berechnen:

$$\overline{MR}^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = r^2 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{MR} = \sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}}$$

Im Dreieck $\triangle BMQ$ gilt $\tan 54° = \frac{\overline{MQ}}{\overline{BQ}} = \frac{\overline{MR} - \overline{RQ}}{\overline{BQ}} = \frac{\sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}} - y}{\frac{x}{2}}$.

Daraus ergibt sich $y = \sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}} - \frac{x}{2}\tan 54°$.

Der Flächeninhalt A des Rechtecks in Abhängigkeit von x und y beträgt somit $A(x, y) = xy$. Ersetzt man nun y, so erhält man

$$A(x) = x \cdot \left(\sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}} - \frac{x}{2}\tan 54°\right)$$

Differenzieren und Nullsetzen führt zur Lösung. Dies kann komfortabel mithilfe eines Computeralgebrasystems, wie beispielsweise dem CAS von GeoGebra, erfolgen:

```
Löse[Ableitung[x*(sqrt[r^2-x^2/4]-x/2*tan[54°]),x]=0,x]
```

Diese drei rechnerischen Lösungen liefert GeoGebra:

$$x_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}|r|, \quad x_2 = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{5}+5}}{2} r, \quad x_3 = -\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{5}+5}}{2} r$$

Da aber $0 < x < r$ erfüllt sein muss, ist nur $x_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} r$ eine gültige Lösung.