Lösung zu Aufgabe 2: Viele benachbarte Kreise

Aus Aufgabe 1 ist bereits bekannt, dass $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$ gilt. Man ersetze nun $t_i = \frac{1}{\sqrt{r_i}}$, wodurch sich $t_3 = t_1 + t_2$ ergibt.

Da es sich bei k_4 umschlossen von k_1, k_3 und g um die gleiche Situation handelt wie bei k_3 umschlossen von k_1, k_2 und g, gilt folglich auch $t_4 = t_1 + t_3$. Gleichermaßen ergibt sich $t_5 = t_1 + t_4$, $t_6 = t_1 + t_5$, usw.

Allgemein gilt also $t_n = t_1 + t_{n-1}$, wobei t_1 und t_2 bekannt sind.

Es handelt sich um eine arithmetische Folge, mit diesen ersten Folgengliedern:

$t_3 = t_1 + t_2$

$t_4 = t_1 + t_3 = t_1 + t_1 + t_2 = 2 \cdot t_1 + t_2$

$t_5 = t_1 + t_4 = t_1 + 2 \cdot t_1 + t_2 = 3 \cdot t_1 + t_2$

$t_6 = t_1 + t_5 = t_1 + 3 \cdot t_1 + t_2 = 4 \cdot t_1 + t_2$

usw.

Daraus lässt sich die explizite Darstellung der Folge leicht ablesen. Es gilt also $t_n = (n-2) \cdot t_1 + t_2$.

Ersetzt man nun wieder $t_i = \frac{1}{\sqrt{r_i}}$, so erhält man

$$\frac{1}{\sqrt{r_n}} = \frac{n-2}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$$

oder, nach r_n umgeformt,

$$r_n = \left(\frac{n-2}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \right)^{-2}.$$